



## آزمون شبه‌نهایی

مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه	رشته : ریاضی و فیزیک	درس: حسابان ۲
تاریخ امتحان: ۱۴۰۵/۰۲/۱۰	ساعت شروع : ۸ صبح	پایه: دوازدهم دوره دوم متوسطه نظری

جهت دسترسی به فایل هر کیوآرکد، آن‌ها را انتخاب یا اسکن کنید.



پاسخ‌نمای تشریحی  
فعال‌سازی ساعت ۲۰



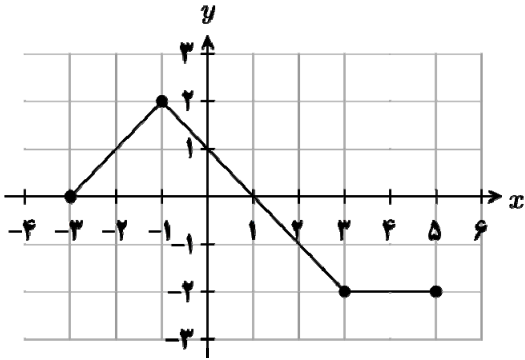
پاسخبرگ آزمون  
فعال

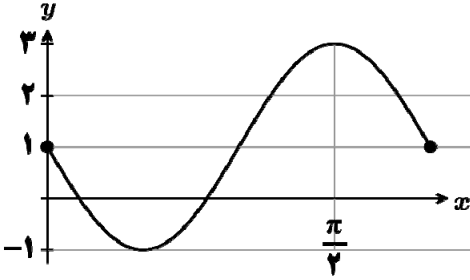
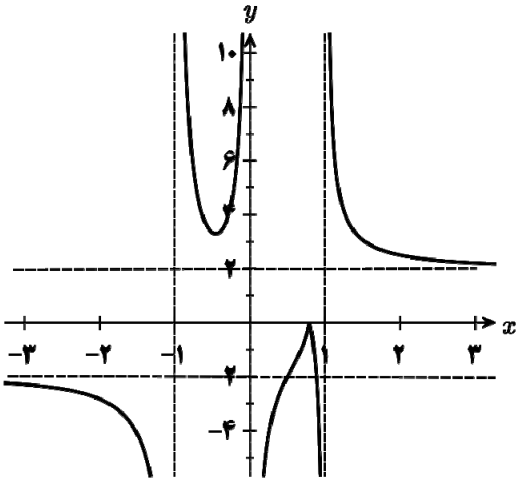


راهنمای تصحیح  
جهت آشنایی دانش‌آموزان با بارم‌بندی  
فعال‌سازی ساعت ۲۰

باسمه تعالی

تعداد صفحه: ۳	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه	رشته: ریاضی و فیزیک	سوالات آزمون شبه نهایی درس: حسابان ۲
نام و نام خانوادگی:	تاریخ امتحان: ۱۴۰۵/۰۲/۱۰	ساعت شروع: ۸ صبح	پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه نظری
نمره	سوالات (استفاده از ماشین حساب ساده مجاز است).		

۱	<p>درستی یا نادرستی جمله های زیر را مشخص کنید.</p> <p>الف) نمودار تابع <math>y = x^2</math> در بازه <math>(0, 1)</math> زیر نمودار تابع <math>y = x^3</math> است.</p> <p>ب) عبارت <math>x^8 + y^8</math> بر عبارت <math>x - y</math> بخش پذیر است.</p> <p>ج) تابع <math>f(x) = 3</math> یک مجانب افقی دارد.</p> <p>د) اگر برای تابع <math>f</math> داشته باشیم <math>f'(a) = 0</math>، آنگاه <math>a</math> نقطه اکسترمم نسبی تابع است.</p>	۱
۱	<p>جاهای خالی را با توجه به عبارت های داخل کمانک کامل کنید.</p> <p>الف) معادله <math>\cos x = 0</math> در بازه <math>[0, 2\pi]</math> دارای ..... جواب است. (یک - دو - سه - چهار)</p> <p>ب) یک تابع می تواند ..... مجانب قائم داشته باشد. (حداقل ۲ - حداکثر ۲ - بی شمار)</p> <p>ج) تابع <math>f(x) = [x]</math> در بازه <math>(0, 2)</math> دارای ..... نقطه ماکسیمم نسبی است. (صفر - یک - دو - بی شمار)</p> <p>( [ ] نماد جزء صحیح است)</p> <p>د) تابع <math>f(x) =  x </math> در بازه <math>[-1, 1]</math> دارای ..... نقطه بحرانی است. (صفر - یک - دو - سه)</p>	۲
۱	<p>نمودار تابع <math>y = f(x)</math> در زیر رسم شده است. نمودار تابع <math>y = 1 - f(1 - 2x)</math> را رسم کنید.</p> 	۳
۱/۲۵	<p>اگر <math>\log_{\frac{1}{3}}(2x - 1) \leq \log_{\frac{1}{3}}(2 - x)</math> حدود <math>x</math> را بیابید.</p>	۴
۱/۲۵	<p>مقادیر <math>a, b</math> را چنان بیابید که چند جمله ای <math>2x^3 - ax + b</math> بر عبارت <math>1 - x</math> بخش پذیر باشد و باقی مانده تقسیم آن بر عبارت <math>x + 2</math> برابر <math>-9</math> باشد.</p>	۵
"ادامه سوالات در صفحه بعد"		

۰/۷۵	چند مثلث به مساحت ۳ سانتی‌متر مربع داریم که طول دو ضلع آن ۵ و ۷ سانتی‌متر باشد؟ چرا؟	۶
۱/۵	توابع $y = \sqrt{x}$ و $y = \cos x - \sin x$ را در نظر بگیرید. با تشکیل یک معادله مثلثاتی و حل آن، تعیین کنید این دو تابع در بازه $[0, 2\pi]$ چند نقطه برخورد دارند؟ طول نقطه برخورد را به دست آورید.	۷
۱/۲۵	<p>قسمتی از نمودار تابع <math>y = a \sin(bx) + c</math> در زیر رسم شده است. با انجام محاسبات، مقادیر <math>a, b, c</math> را به دست آورید. (<math>b &gt; 0</math>)</p> 	۸
۱	<p>نمودار تابع <math>y = f(x)</math> به صورت زیر است. موارد خواسته شده را بنویسید.</p>  <p>الف) <math>\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)</math>          ب) <math>\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)</math>          ج) <math>\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)</math>          د) <math>\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x)</math></p>	۹
۱/۲۵	نمودار تابع $f(x) = \frac{2x^2 - x - 6}{x^2 - 4x + 4}$ را در اطراف مجانب قائم آن رسم کنید.	۱۰
	ادامه سوالات در صفحه بعد"	

۱/۲۵	الف) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1-2x}{\sqrt{x^2-1}}$ ب) $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{4}} \frac{[x]}{\tan x}$	۱۱
۱/۲۵	قضیه: اگر تابع $f$ در نقطه $a$ مشتق پذیر باشد، در این نقطه پیوسته است.	۱۲
۱/۵	الف) $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x+6}}{2x^2-x-1}$ ب) $f(x) = x^2 \cdot \sin^3 x$	۱۳
۱/۲۵	مشتق پذیری تابع $f(x) = \begin{cases} 2x-1 & x < -1 \\ x^2-4 & x \geq -1 \end{cases}$ را در نقطه‌ای به طول $-1$ بررسی کنید.	۱۴
۱	معادله حرکت یک متحرک بر حسب ثانیه به صورت $f(t) = t^2 - 5t + 7$ است. در چه لحظه‌ای سرعت متوسط این متحرک در بازه زمانی $[1, 3]$ با سرعت لحظه‌ای برابر می‌شود؟	۱۵
۱/۲۵	مقادیر اکستریم مطلق تابع $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$ را در بازه $[-2, 2]$ بیابید.	۱۶
۱/۲۵	مقادیر $a, b$ را چنان بیابید که نقطه $(-1, 2)$ اکستریم نسبی تابع $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 5$ باشد.	۱۷
۲۰	موفق و پیروز باشید	جمع نمره

نام حوزه امتحانی:	محل مهر رییس حوزه اجرا	باسمه تعالی	شماره داوطلب:
تاریخ امتحان: ۱۴۰۵/۰۲/۱۰			نام:
ساعت شروع: ۸ صبح		حسابان ۲	نام خانوادگی:
رشته: ریاضی و فیزیک			شهرستان / منطقه:
تعداد صفحه: ۵ صفحه			مدرسه:
در این کادر چیزی ننویسید			

۱	(الف) (ج)	(ب) (د)	۱
۱	(الف) (ج)	(ب) (د)	۱
۱			۳
۱/۲۵			۴
"ادامه پاسخ در صفحه بعد"			

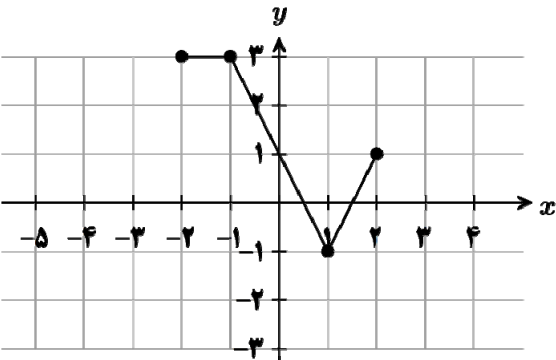
۱/۲۵		۵
۰/۲۵		۶
۱/۵		۷
۱/۲۵		۸
۱		۹
	"ادامهٔ پاسخ در صفحه بعد"	

۱/۲۵		۱۰
۱/۲۵		۱۱
۱/۲۵		۱۲
	"ادامهٔ پاسخ در صفحه بعد"	

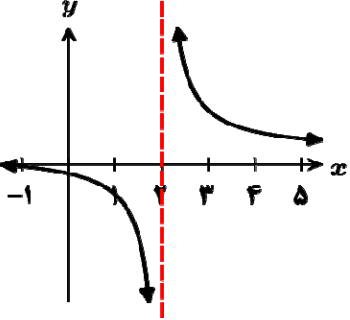
۱/۵		۱۳
۱/۲۵		۱۴
۱		۱۵
	"ادامهٔ پاسخ در صفحه بعد"	

۱/۲۵		۱۶
۱/۲۵		۱۷
۲۰	جمع نمره	موفق و پیروز باشید

تعداد صفحه: ۵	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه	رشته: ریاضی و فیزیک	راهنمای نمره‌گذاری امتحان شبه نهایی درس: حسابان ۲
تاریخ امتحان: ۱۴۰۵/۰۲/۱۰		ساعت شروع: ۸ صبح	پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه نظری
نمره	راهنمای نمره‌گذاری		ردیف

۱	<p>(الف) نادرست (۰/۲۵) (صفحه ۱۴)</p> <p>(ب) نادرست (۰/۲۵) (صفحه ۲۰)</p> <p>(ج) درست (۰/۲۵) (صفحه ۶۸)</p> <p>(د) نادرست (۰/۲۵) (صفحه ۱۲۲)</p>	۱																									
۱	<p>(الف) دو (۰/۲۵) (صفحه ۳۶)</p> <p>(ب) بی‌شمار (۰/۲۵) (صفحه ۵۵)</p> <p>(ج) بی‌شمار (۰/۲۵) (صفحه ۱۱۶)</p> <p>(د) سه (۰/۲۵) (صفحه ۱۱۷)</p>	۲																									
۱	<table border="1" style="display: inline-table; margin-right: 20px;"> <tr> <td>x</td> <td>۲</td> <td>۱</td> <td>-۱</td> <td>-۲</td> </tr> <tr> <td></td> <td>-۳</td> <td>-۱</td> <td>۳</td> <td>۵</td> </tr> <tr> <td colspan="5"><hr/></td> </tr> <tr> <td>y</td> <td>۰</td> <td>۲</td> <td>-۲</td> <td>-۲</td> </tr> <tr> <td></td> <td>۱</td> <td>-۱</td> <td>۳</td> <td>۳</td> </tr> </table>  <p>هر نقطه درست شکل (۰/۲۵) (صفحه ۱۲)</p>	x	۲	۱	-۱	-۲		-۳	-۱	۳	۵	<hr/>					y	۰	۲	-۲	-۲		۱	-۱	۳	۳	۳
x	۲	۱	-۱	-۲																							
	-۳	-۱	۳	۵																							
<hr/>																											
y	۰	۲	-۲	-۲																							
	۱	-۱	۳	۳																							
۱/۲۵	<p>تابع <math>y = \log_{\frac{1}{3}} x</math> اکیداً نزولی است. پس</p> $\log_{\frac{1}{3}}(2x - 1) \leq \log_{\frac{1}{3}}(2 - x) \Rightarrow 2x - 1 \geq 2 - x \Rightarrow \underbrace{x \geq 1}_{(۰/۵)} \quad (۱)$ $2x - 1 > 0 \Rightarrow \underbrace{x > \frac{1}{2}}_{(۰/۲۵)} \quad (۲)$ $2 - x > 0 \Rightarrow \underbrace{x < 2}_{(۰/۲۵)} \quad (۳)$ <p style="text-align: right;"> <math>\xrightarrow{(۱) \cap (۲) \cap (۳)} \underbrace{1 \leq x &lt; 2}_{(۰/۲۵)}</math> </p> <p>(صفحه ۱۸)</p>	۴																									
"ادامه پاسخ در صفحه بعد"																											

۱/۲۵	$\left. \begin{aligned} 1 - x = 0 &\Rightarrow \underbrace{x = 1}_{(0/25)} \Rightarrow \underbrace{2(1)^3 - a(1) + b = 0}_{(0/25)} \\ 2 + x = 0 &\Rightarrow \underbrace{x = -2}_{(0/25)} \Rightarrow \underbrace{2(-2)^3 - a(-2) + b = -9}_{(0/25)} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \underbrace{a = 3, b = 1}_{(0/25)}$	۵
۰/۷۵	$S = \frac{1}{2} ab \sin \theta \Rightarrow 3 = \frac{1}{2} \times 5 \times 7 \sin \theta \Rightarrow \underbrace{\sin \theta = \frac{6}{35}}_{(0/25)} < 1 \Rightarrow \text{دو مثلث داریم} \quad (0/25)$	۶
۱/۵	$\begin{aligned} \cos x - \sin x = \sqrt{2} &\Rightarrow \underbrace{(\cos x - \sin x)^2 = 2}_{(0/25)} \\ &\Rightarrow \underbrace{\cos^2 x + \sin^2 x - 2 \sin x \cos x = 2}_{(0/25)} \\ &\Rightarrow \underbrace{\sin 2x = -1}_{(0/5)} \\ &\Rightarrow \underbrace{x = k\pi - \frac{\pi}{4}}_{(0/25)} \end{aligned}$ <p>با امتحان جواب، فقط جواب‌های به فرم <math>x = 2k\pi - \frac{\pi}{4}</math> قابل قبول است، که دو تابع در بازه <math>[0, 2\pi]</math> فقط یک نقطه برخورد <math>\frac{7\pi}{4}</math> دارند. (۰/۲۵)</p>	۷
۱/۲۵	$\frac{3}{4} T = \frac{\pi}{2} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{ b } \Rightarrow \underbrace{b = 3}_{(0/25)}$ $\left. \begin{aligned} \max &= 3 = c +  a  \\ \min &= -1 = c -  a  \end{aligned} \right\} \Rightarrow \underbrace{c = 1}_{(0/25)},  a  = 2 \Rightarrow \underbrace{a = -2}_{(0/25)}$	۸
	"ادامه پاسخ در صفحه بعد"	

۱	<p>(الف) ۲ (۰/۲۵)      (ب) -۲ (۰/۲۵)      (ج) <math>-\infty</math> (۰/۲۵)      (د) <math>+\infty</math> (۰/۲۵)</p> <p>(صفحه ۴۸ و ۶۱)</p>	۹
۱/۲۵	$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x^2 - x - 6}{x^2 - 4x + 4} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(2x+3)(x-2)}{(x-2)^2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x+3}{x-2} = \frac{7}{0^+} = \underbrace{+\infty}_{(0/25)}$ $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x^2 - x - 6}{x^2 - 4x + 4} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(2x+3)(x-2)}{(x-2)^2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x+3}{x-2} = \frac{7}{0^-} = \underbrace{-\infty}_{(0/25)}$ <p><math>x = 2</math> مخارج قائم است.</p>  <p>(صفحه ۵۷)</p>	۱۰
۱/۲۵	<p>(الف) <math>\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1-2x}{\sqrt{x^2-1}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x}{\sqrt{x^2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x}{ x } = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x}{-x} = \underbrace{2}_{(0/25)}</math></p> <p>(ب) <math>\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \frac{[x]}{\tan x} = \frac{-\frac{\pi}{2}}{\infty} = \underbrace{0}_{(0/25)}</math></p> <p>(صفحه ۶۶)</p> <p>(صفحه ۶۹)</p>	۱۱
"ادامه پاسخ در صفحه بعد"		

۱/۲۵	<p>تابع <math>f</math> در نقطه <math>a</math> مشتق پذیر است. پس</p> $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = L \quad (۰/۲۵)$ <p>لذا</p> $\lim_{x \rightarrow a} f(x) - f(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} (x - a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \times \lim_{x \rightarrow a} (x - a) = L \times 0 = 0$ <p>پس</p> $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \quad (۰/۲۵)$ <p>یعنی تابع <math>f</math> در نقطه <math>a</math> پیوسته است.</p> <p>(صفحه ۸۶)</p>	۱۲
۱/۵	<p>الف) <math>f(x) = \frac{\sqrt[3]{x} + 6}{2x^2 - x - 1} \Rightarrow f'(x) = \frac{\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}(2x^2 - x - 1) - (\sqrt[3]{x} + 6)(4x - 1)}{(2x^2 - x - 1)^2}</math></p> <p>ب) <math>f(x) = x^2 \cdot \sin^3 x \Rightarrow f'(x) = 2x \cdot \sin^3 x + x^2 (\cos x) (3 \sin^2 x)</math></p> <p>(صفحه ۹۷)</p>	۱۳
۱/۲۵	$f'_-(-1) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{2x - 1 - ((-1)^2 - 4)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{2x + 2}{x + 1} = 2$ $f'_+(-1) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 - 4 - ((-1)^2 - 4)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 - 1}{x + 1} = -2$ <p>چون <math>f'_-(-1) \neq f'_+(-1)</math> تابع در نقطه <math>-1</math> مشتق پذیر نیست. (۰/۲۵)</p> <p>(صفحه ۱۰۰)</p>	۱۴
"ادامه پاسخ در صفحه بعد"		

۱	$\text{سرعت متوسط} = \frac{f(3)-f(1)}{3-1} = \frac{(3^2-5(3)+7)-(1^2-5(1)+7)}{2} = -1$ $(0/25)$ $(0/25)$ <p>سرعت لحظه‌ای <math>(0/25) = f'(t) = 2t - 5 = -1 \Rightarrow t = 2</math> <math>(0/25)</math></p> <p>(صفحه ۱۱۰)</p>	۱۵
۱/۲۵	$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 0 \Rightarrow x = -1, x = 3 \notin [-2, 2]$ $(0/25)$ $(0/25)$ <p><math>f(-2) = -1, f(2) = -21, f(-1) = 6 \Rightarrow 6 = \text{ماکسیمم مطلق} = 6</math> <math>(0/25)</math></p> <p><math>-21 = \text{مینیمم مطلق} = -21</math> <math>(0/25)</math></p> <p>(صفحه ۱۱۸)</p>	۱۶
۱/۲۵	$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 5 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \xrightarrow{x=-1} 3(-1)^2 + 2a(-1) + b = 0$ $(0/25)$ $(0/25)$ $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 5 \xrightarrow{x=-1} (-1)^3 + a(-1)^2 + b(-1) + 5 = 2$ $(0/25)$ $\begin{cases} b - 2a = -3 \\ -b + a = -2 \end{cases} \Rightarrow \underline{a = 5}, \underline{b = 7}$ $(0/25) \quad (0/25)$ <p>(صفحه ۱۲۶)</p>	۱۷
۲۰	جمع نمره	موفق و پیروز باشید

همکاران محترم ضمن عرض خسته نباشید و خدا قوت  
به راه‌حل‌های درست دیگر به تناسب نمره تعلق گیرد.

این راهنما جهت آشنایی دانش‌آموزان با ریزبارم هر سوال آزمون می‌باشد.

## ۱ آزمون شبه نهایی دوازدهم ریاضی

۱. درستی یا نادرستی جمله های زیر را مشخص کنید. (۱ نمره)
- الف) نمودار تابع  $y = x^2$  در بازه  $(0, 1)$  زیر نمودار تابع  $y = x^3$  است.
- ب) عبارت  $x^8 + y^8$  بر عبارت  $x - y$  بخش پذیر است.
- ج) تابع  $f(x) = 3$  یک مجانب افقی دارد.
- د) اگر برای تابع  $f$  داشته باشیم  $f'(a) = 0$ ، آنگاه  $a$  نقطه اکسترمم نسبی تابع است.

### پاسخ

نادرست (۰/۲۵ نمره)

ب) نادرست (۰/۲۵ نمره)

ج) درست (۰/۲۵ نمره)

د) نادرست (۰/۲۵ نمره)

فیلم پاسخ



۲ آزمون شبه نهایی دوازدهم ریاضی

۲. جاهای خالی را با توجه به عبارت های داخل کمانک کامل کنید.  
(۱ نمره)

الف) معادله  $\cos x = 0$  در بازه  $[0, 2\pi]$  دارای ..... جواب است. (یک - دو - سه - چهار)

ب) یک تابع می تواند ..... مجانب قائم داشته باشد. (حداقل ۲ - حداکثر ۲ - بی شمار)

ج) تابع  $f(x) = [x]$  در بازه  $(0, 2)$  دارای ..... نقطهٔ ماکسیمم نسبی است. (صفر - یک - دو - بی شمار) ( [ ] نماد جزء صحیح است)

د) تابع  $f(x) = |x|$  در بازه  $[-1, 1]$  دارای ..... نقطهٔ بحرانی است. (صفر - یک - دو - سه)

## پاسخ

الف) دو (۰/۲۵ نمره)

ب) بی شمار (۰/۲۵ نمره)

ج) بی شمار (۰/۲۵ نمره)

د) سه (۰/۲۵ نمره)

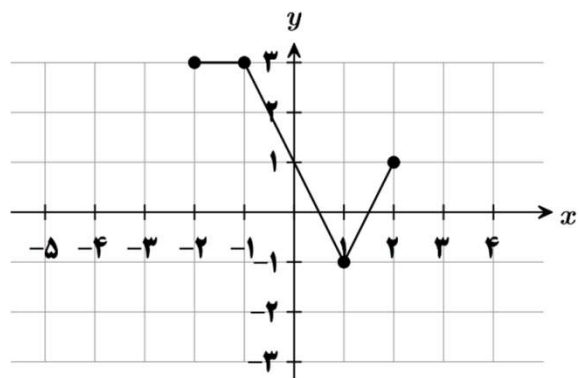
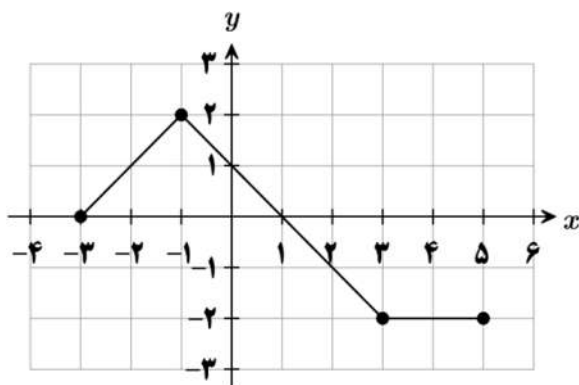
فیلم پاسخ



۳ آزمون شبه نهایی دوازدهم ریاضی

۳ نمودار تابع  $y = f(x)$  در زیر رسم شده است. نمودار تابع

$y = 1 - f(1 - 2x)$  را رسم کنید. (۱ نمره)



$x$	۲	۱	-۱	-۲
	-۳	-۱	۳	۵
$y$	۰	۲	-۲	-۲
	۱	-۱	۳	۳

هر نقطه درست شکل (۰/۲۵) نمره

پاسخ

فیلم پاسخ





## ۵ آزمون شبه نهایی دوازدهم ریاضی

۵ مقادیر  $a, b$  را چنان بیابید که چندجمله‌ای  $2x^3 - ax + b$  بر عبارت  $1 - x$  بخش پذیر باشد و باقی‌مانده تقسیم آن بر عبارت  $x + 2$  برابر  $-9$  باشد. (۱/۲۵ نمره)

### پاسخ

$$\left. \begin{aligned} 1 - x = 0 &\Rightarrow \underbrace{x = 1}_{(0/25 \text{ نمره})} \Rightarrow \underbrace{2(1)^3 - a(1) + b = 0}_{(0/25 \text{ نمره})} \\ 2 + x = 0 &\Rightarrow \underbrace{x = -2}_{(0/25 \text{ نمره})} \Rightarrow \underbrace{2(-2)^3 - a(-2) + b = -9}_{(0/25 \text{ نمره})} \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow \underbrace{a = 3, b = 1}_{(0/25 \text{ نمره})}$$

فیلم پاسخ



## ۶ آزمون شبه نهایی دوازدهم ریاضی

۶ چند مثلث به مساحت ۳ سانتی‌متر مربع داریم که طول دو ضلع آن ۵ و ۷ سانتی‌متر باشد؟ چرا؟ (۰/۷۵ نمره)

### پاسخ

$$S = \frac{1}{2} ab \sin \theta \Rightarrow 3 = \underbrace{\frac{1}{2} \times 5 \times 7 \sin \theta}_{(0/25 \text{ نمره})}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\sin \theta = \frac{6}{35}}_{(0/25 \text{ نمره})} < 1 \Rightarrow \text{دو مثلث داریم (۰/۲۵ نمره)}$$

فیلم پاسخ



## ۷ آزمون شبه نهایی دوازدهم ریاضی

۷. توابع  $y = \sqrt{2}$  و  $y = \cos x - \sin x$  را در نظر بگیرید. با تشکیل یک معادلهٔ مثلثاتی و حل آن، تعیین کنید این دو تابع در بازهٔ  $[0, 2\pi]$  چند نقطهٔ برخورد دارند؟ طول نقطه یا نقاط برخورد را به دست آورید. (۱/۵ نمره)

### پاسخ

$$\cos x - \sin x = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \underbrace{(\cos x - \sin x)^2}_{(0/25 \text{ نمره})} = 2$$

$$\Rightarrow \underbrace{\cos^2 x + \sin^2 x - 2 \sin x \cos x}_{(0/25 \text{ نمره})} = 2$$

$$\Rightarrow \underbrace{\sin 2x}_{(0/5 \text{ نمره})} = -1$$

$$\Rightarrow \underbrace{x = k\pi - \frac{\pi}{4}}_{(0/25 \text{ نمره})}$$

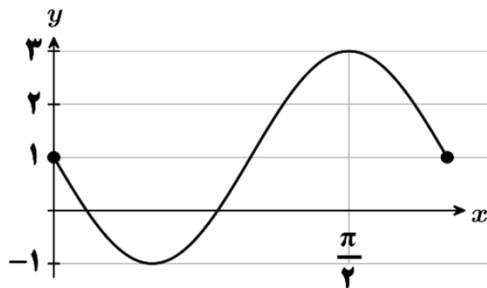
با امتحان جواب، فقط جواب‌های به فرم  $x = 2k\pi - \frac{\pi}{4}$  قابل قبول است، که دو تابع در بازهٔ  $[0, 2\pi]$  فقط یک نقطهٔ برخورد  $\frac{7\pi}{4}$  دارند. (۰/۲۵ نمره)

فیلم پاسخ



## ۸ آزمون شبه نهایی دوازدهم ریاضی

۸ قسمتی از نمودار تابع  $y = a \sin(bx) + c$  در زیر رسم شده است. با انجام محاسبات، مقادیر  $a$ ,  $b$ ,  $c$  را به دست آورید. ( $b > 0$ ) (نمره ۱/۲۵)



پاسخ

$$\frac{3}{4}T = \frac{\pi}{2} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow \underline{b = 3} \quad (\text{نمره } 0/25)$$

$$\left. \begin{array}{l} \max = 3 = c + |a| \\ \min = -1 = c - |a| \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{c = 1}, |a| = 2 \Rightarrow \underline{a = -2} \quad (\text{نمره } 0/25)$$

فیلم پاسخ



۹ آزمون شبه نهایی دوازدهم ریاضی

۹. نمودار تابع  $y = f(x)$  به صورت زیر است. موارد خواسته شده

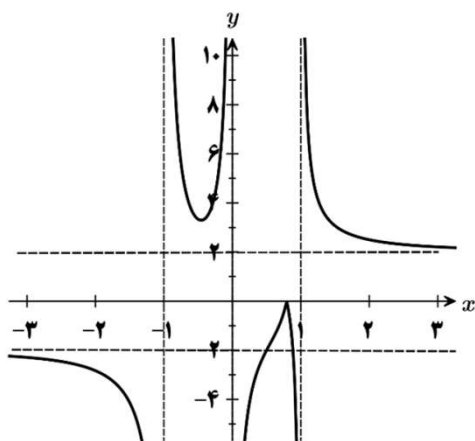
را بنویسید. (۱ نمره)

الف)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

ب)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

ج)  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$

د)  $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x)$



پاسخ

الف) ۲ (الف ۰/۲۵ نمره)

ب) -۲ (ب ۰/۲۵ نمره)

ج)  $-\infty$  (ج ۰/۲۵ نمره)

د)  $+\infty$  (د ۰/۲۵ نمره)

فیلم پاسخ



۱۰ آزمون شبه نهایی دوازدهم ریاضی

۱۰. نمودار تابع  $f(x) = \frac{2x^2 - x - 6}{x^2 - 4x + 4}$  را در اطراف مجانب قائم آن رسم کنید. (۱/۲۵ نمره)

## پاسخ

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x^2 - x - 6}{x^2 - 4x + 4} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(2x+3)(x-2)}{(x-2)^2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x+3}{x-2} = \frac{7}{0^+}$$

(نمره ۰/۲۵)

$$= +\infty$$

(نمره ۰/۲۵)

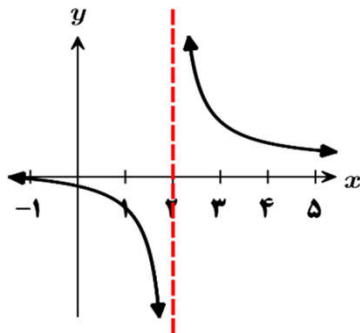
$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x^2 - x - 6}{x^2 - 4x + 4} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(2x+3)(x-2)}{(x-2)^2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x+3}{x-2} = \frac{7}{0^-}$$

(نمره ۰/۲۵)

$$= -\infty$$

(نمره ۰/۲۵)

$x = 2$  مجانب قائم است. (۰/۲۵ نمره)



فیلم پاسخ





۱۲. قضیه: اگر تابع  $f$  در نقطه  $a$  مشتق پذیر باشد، در این نقطه پیوسته است. (۱/۲۵ نمره)

پاسخ

تابع  $f$  در نقطه  $a$  مشتق پذیر است. پس:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = L \quad (\text{نمره } ۰/۲۵)$$

لذا:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) - f(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} (x - a) \quad (\text{نمره } ۰/۲۵)$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \times \lim_{x \rightarrow a} (x - a) = L \times ۰ = ۰ \quad (\text{نمره } ۰/۵)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \quad (\text{نمره } ۰/۲۵)$$

یعنی تابع  $f$  در نقطه  $a$  پیوسته است.

فیلم پاسخ



۱۳. مشتق توابع زیر را به دست آورید: (ساده کردن مشتق لازم نیست)  
(۱/۵ نمره)

$$f(x) = \frac{\sqrt[3]{x}+6}{2x^2-x-1} \quad \text{الف)}$$

$$f(x) = x^2 \cdot \sin^3 x \quad \text{ب)}$$

پاسخ

الف)

$$f(x) = \frac{\sqrt[3]{x}+6}{2x^2-x-1}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}(2x^2-x-1) - (4x-1)(\sqrt[3]{x}+6)}{(2x^2-x-1)^2}$$

ب)

$$f(x) = x^2 \cdot \sin^3 x \Rightarrow f'(x)$$

$$= 2x \cdot \sin^3 x + x^2 (\cos x) (3 \sin^2 x)$$

فیلم پاسخ



۱۴ آزمون شبه نهایی دوازدهم ریاضی

۱۴. مشتق پذیری تابع  $f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & x < -1 \\ x^2 - 4x & x \geq -1 \end{cases}$  را در نقطه‌ای به طول ۱- بررسی کنید. (۱/۲۵ نمره)

پاسخ

$$f'_-(-1) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)}$$

(۰/۲۵ نمره)

$$= \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{2x - 1 - ((-1)^2 - 4)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{2x + 2}{x + 1} = 2$$

(۰/۲۵ نمره)

$$f'_+(-1) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)}$$

(۰/۲۵ نمره)

$$= \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 - 4 - ((-1)^2 - 4)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 - 1}{x + 1} = -2$$

(۰/۲۵ نمره)

چون  $f'_-(-1) \neq f'_+(-1)$  تابع در نقطه ۱- مشتق پذیر نیست. (۰/۲۵ نمره)

فیلم پاسخ



۱۵ آزمون شبه نهایی دوازدهم ریاضی

۱۵. معادله حرکت یک متحرک بر حسب ثانیه به صورت  $f(t) = t^2 - 5t + 7$  است. در چه لحظه‌ای سرعت متوسط این متحرک در بازه زمانی  $[1, 3]$  با سرعت لحظه‌ای برابر می‌شود؟ (۱ نمره)

## پاسخ

$$\begin{aligned} \text{سرعت متوسط} &= \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} \\ &= \frac{(3^2 - 5(3) + 7) - (1^2 - 5(1) + 7)}{2} = -1 \\ \text{سرعت لحظه‌ای} &= f'(t) = 2t - 5 = -1 \\ \Rightarrow t &= 2 \end{aligned}$$

فیلم پاسخ



## ۱۶ آزمون شبه نهایی دوازدهم ریاضی

۱۶. مقادیر اکسترمم مطلق تابع  $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$  را در بازه  $[-2, 2]$  بیابید. (نمره ۱/۲۵)

## پاسخ

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$$

$$\Rightarrow \underbrace{f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 0}_{(نمره ۰/۲۵)}$$

$$\Rightarrow \underbrace{x = -1, x = 3 \notin [-2, 2]}_{(نمره ۰/۲۵)}$$

$$\underbrace{f(-2) = -1, f(2) = -21, f(-1) = 6}_{(نمره ۰/۲۵)}$$

$$\Rightarrow 6 = \text{ماکسیمم مطلق} \quad (نمره ۰/۲۵)$$

$$-21 = \text{مینیمم مطلق} \quad (نمره ۰/۲۵)$$

فیلم پاسخ



۱۷ آزمون شبه نهایی دوازدهم ریاضی

۱۷. مقادیر  $a$ ,  $b$  را چنان بیابید که نقطه  $(-1, 2)$  اکسترمم نسبی تابع  $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 5$  باشد. (۱/۲۵ نمره)

پاسخ

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 5 \Rightarrow f'(x) = \underbrace{3x^2 + 2ax + b}_{(0/25 \text{ نمره})}$$

$$\xrightarrow{x=-1} \underbrace{3(-1)^2 + 2a(-1) + b}_{(0/25 \text{ نمره})} = 0$$

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 5$$

$$\xrightarrow{x=-1} \underbrace{(-1)^3 + a(-1)^2 + b(-1) + 5}_{(0/25 \text{ نمره})} = 2$$

$$\begin{cases} b - 2a = -3 \\ -b + a = -2 \end{cases} \Rightarrow \underbrace{a = 5}_{(0/25 \text{ نمره})}, \underbrace{b = 7}_{(0/25 \text{ نمره})}$$

فیلم پاسخ

